

名古屋大学全学教育科目
経営学(文系基礎科目)

資本市場と証券投資の理論 ～金融工学の基礎～

中島英喜

名古屋大学大学院経済学研究科
(finance.mpt@gmail.com)

5.資産市場の均衡モデル

5.1 個人の投資行動理論の復習

5.2 均衡価格モデル(CAPM)の導出

5.3 ケーススタディ:株価の評価

5.1 個人の投資行動理論の復習

5.1.2 MPTの主張

- ・分散投資によるリスク低減

⇒投資対象のリターンが完全相関していない限り、分散投資(diversification)は、期待リターンを下げずにリスク(リターンの分散: variance)を低減できる

- ・分離定理

⇒安全資産が存在する時の投資の意思決定は、

- ①リスク資産の最適購入比率の決定と、
- ②リスク資産の最適購入総額の決定に分けられる

「経営学」資料(中島英喜)

3

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.1 投資モデルと資産価格モデル

- ・MPTの結論と価格理論のアイデア

⇒投資対象のリターンに関して、下記の統計量が与えられ
ると危険資産の資金配分比率を決定できる

→期待値、分散、相関係数

⇒危険資産の最適な資金配分比率が分かれば、期待値を逆算できる

→投資対象の分散、相関係数、安全利子率は既知とする

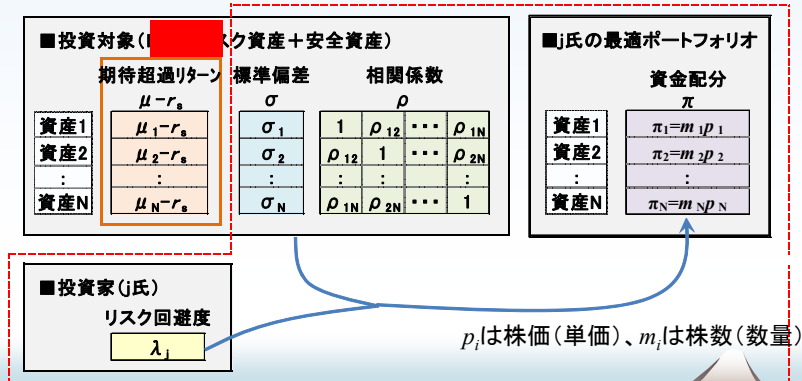
「経営学」資料(中島英喜)

4

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.1 投資モデルと資産価格モデル

・MPTの結論と価格理論のアイデア



「経営学」資料(中島英喜)

5

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.2 等質期待仮定と市場均衡

・等質期待仮定とは

- ⇒市場に存在する全てのリスク資産の将来キャッシュ・フローについて、その**同時確率分布**を考える
- ⇒等質期待仮定…この同時確率分布の情報を**全ての投資家**が共有している
- ⇒ここでは、上記キャッシュ・フローの「期待値」、「標準偏差」、「相関係数」の情報共有を仮定すれば**十分**
- ⇒**合理的期待仮定**が成立するなら、等質期待仮定も成立する

「経営学」資料(中島英喜)

6

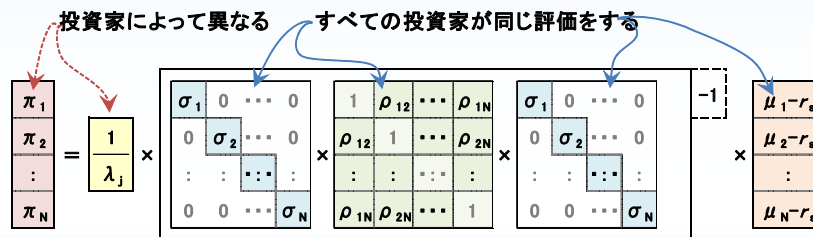
5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.2 等質期待仮定と市場均衡

・リスク資産が N 個(資産 $1 \dots N$)と安全資産の場合

⇒ j 氏のリスク資産の最適ポートフォリオ π_j^*

$$\pi_j = (1/\lambda_j) \times [\Sigma^{-1}(\mu - r_s \mathbf{1})]$$



「経営学」資料(中島英喜)

7

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.2 等質期待仮定と市場均衡

・安全資産が存在し、かつ投資家の等質期待仮定が成立している市場を考える

⇒各投資家の最適ポートフォリオにおけるリスク資産部分の内部構成(=**リスク資産ポートフォリオ**)は、全ての投資家で**共通**になる

⇒全ての投資家のリスク資産ポートフォリオの**合計**は、市場に存在するリスク資産の総供給(**市場ポートフォリオ**)と一致するはず

⇒**市場の清算条件**(=総需要と総供給の一致)

「経営学」資料(中島英喜)

8

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.2 等質期待仮定と市場均衡

・危険資産の総需要(金額ベース)

$$\begin{aligned}\Rightarrow \text{総需要 } \pi_D &= (1/\lambda_1) \times [\Sigma^{-1}(\mu - r_s \mathbf{1})] && \cdots \text{1人目の需要} \\ &+ (1/\lambda_2) \times [\Sigma^{-1}(\mu - r_s \mathbf{1})] && \cdots \text{2人目の需要} \\ &\vdots \\ &+ (1/\lambda_{\text{総人口}}) \times [\Sigma^{-1}(\mu - r_s \mathbf{1})] && \cdots \text{最後人の需要} \\ &= (1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 + \cdots + 1/\lambda_{\text{総人口}}) \times [\Sigma^{-1}(\mu - r_s \mathbf{1})] \\ &= (1/\lambda_{\text{社会全体}}) \times [\Sigma^{-1}(\mu - r_s \mathbf{1})]\end{aligned}$$

「経営学」資料(中島英喜)

9

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.2 等質期待仮定と市場均衡

・危険資産の総供給(金額ベース)

$$\begin{aligned}\Rightarrow \text{総供給 } \pi_M &= (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \cdots \quad \pi_N)'\end{aligned}$$

→ 個別銘柄 n の総供給 π_n

$$\rightarrow \pi_n = \text{銘柄}n\text{の株価}p_n \times \text{銘柄}n\text{の発行株式総数}m_n$$

→ 観察可能(簡単に計算できる)

⇒ この総供給ベクトル π_M を**市場ポートフォリオ**と呼ぶ

「経営学」資料(中島英喜)

10

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.2 等質期待仮定と市場均衡

・危険資産 N 個の均衡価格

⇒市場の清算条件…**総需要 π_D = 総供給 π_M**

$$(1/\lambda_{\text{社会全体}}) \times [\Sigma^{-1}(\mu - r_s \mathbf{1})] = (p_1 m_1 \quad p_2 m_2 \quad \cdots \quad p_N m_N)'$$

⇒**均衡価格** ($\mathbf{p} = (p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_N)'$)

$$(p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_N)' = (1/\lambda_{\text{社会全体}}) \times \text{diag}[m_n]^{-1} [\Sigma^{-1}(\mu - r_s \mathbf{1})]$$

※ $\text{diag}[m_n]$ は、 $m_n (n=1, 2, \dots, N)$ を対角成分とする対角行列

$$\text{diag}[m_n]^{-1} = \text{diag}[1/m_n]$$

「経営学」資料(中島英喜)

11

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.2 等質期待仮定と市場均衡

・均衡価格(解)を吟味してみよう

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/m_N \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \pi_{D1} \\ \pi_{D2} \\ \vdots \\ \pi_{DN} \end{pmatrix}$$

← 銘柄 n の総需要額(π_{Dn})を
その総供給量(m_n)で除すと
均衡価格(p_n)になる

$$= \frac{1}{m_n} \times \frac{1}{\lambda_{\text{社会}}} \times \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1N} \\ \rho_{12} & 1 & \cdots & \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1N} & \rho_{2N} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1 - r_s \\ \mu_2 - r_s \\ \vdots \\ \mu_N - r_s \end{pmatrix}$$

「経営学」資料(中島英喜)

12

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.3 演習(1)

・下記の社会での、危険資産の均衡価格を求めよ

⇒ 人口…3人(Aさん、Bさん、Cさん)

各人の保有資金… $(v_A, v_B, v_C) = (500, 400, 350)$ 万円

各人のリスク回避度… $(\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C) = (0.01, 0.025, 0.1)$ 万円⁻¹

⇒ 存在する資産…2つの危険資産(XとY)と安全資産S

$E(r_X) = 20\%$ 、 $E(r_Y) = 30\%$ 、安全利子率 = 10%、

$\text{var}(r_X) = (10\%)^2$ 、 $\text{var}(r_Y) = (20\%)^2$ 、 $\text{correl}(r_X, r_Y) = 0.5$

XとYの発行済み株数… $(m_X, m_Y) = (50, 10)$ 株

「経営学」資料(中島英喜)

13

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.3 演習(1)

・jさんの最適ポートフォリオ π_j^*

$$\Rightarrow \pi_j^* = (1/\lambda_j) [\Sigma^{-1}] [\mu - r_s \mathbf{1}]$$

$$\pi_j^* = \frac{1}{\lambda_j} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda_j} \times \begin{bmatrix} 20/3 \\ 10/3 \end{bmatrix}$$

「経営学」資料(中島英喜)

14

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.3 演習(1)

- ・市場の清算条件を使って均衡価格を導出

⇒ 総需要 π_D = 総供給 π_M

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/m_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \pi_{D1} \\ \pi_{D2} \\ \vdots \\ \pi_{DN} \end{bmatrix}$$

← 銘柄nの総需要額(π_{Dn})を
その総供給量(m_n)で除すと
均衡価格(p_n)になる

$$\begin{bmatrix} p_X \\ p_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 0 \\ 0 & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} + & + \\ + & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \text{万円}$$

「経営学」資料(中島英喜)

15

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.3 演習(1)

- ・質問1: 前頁の均衡価格の導出で、各人の保有資金を考慮したか?

⇒ 答(的には考慮して)

- ・質問2: 各人の預金(または借金)額を計算したか?

⇒ 答(計算して)

- ・質問3: 各人の預金(借金)の合計はゼロになるか?

⇒ 答(ゼロにならない: 合計で 万円になる)

「経営学」資料(中島英喜)

16

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.3 演習(1)

- ・質問4: 預金(安全資産)は金融資産か?
⇒ 答()
- ・質問5: 投資家の預金の合計はゼロになるべきか?
⇒ 答() : 投資家とは別に が存在するので)
- ・質問6: 安全資産の需給均衡を考慮する必要は?
⇒ 答(必要)

「経営学」資料(中島英喜)

17

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.3 演習(1)

- ・質問7: 5.2.3節では安全資産の需給を考えたか?
⇒ 答()
- ・質問8: 安全資産の需給均衡を考慮せずに危険資産の均衡価格を計算できたのはなぜ?
⇒ 答() (安全資産の)を所与としたから)
- ・質問9: より一般的な問題の形は?
⇒ 答(安全資産の)ではなく、 を所与とする)

「経営学」資料(中島英喜)

18

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.4 演習(2)

- ・下記の社会での、危険資産の均衡価格を求めよ

⇒ 人口…3人(Aさん、Bさん、Cさん)

各人の保有資金… $(v_A, v_B, v_C) = (500, 400, 350)$ 万円

各人のリスク回避度… $(\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C) = (0.01, 0.025, 0.1)$ 万円⁻¹

⇒ 存在する資産…2つの危険資産(XとY)と安全資産S

$E(r_X)=20\%$ 、 $E(r_Y)=30\%$ 、**Sの期末CF≒28.75万円7枚'**

$\text{var}(r_X)=(10\%)^2$ 、 $\text{var}(r_Y)=(20\%)^2$ 、 $\text{correl}(r_X, r_Y)=0.5$

X, Y, Sの発行量… $(m_X, m_Y, \mathbf{m_S}) = (50\text{株}, 10\text{株}, \mathbf{20\text{枚}})$

「経営学」資料(中島英喜)

19

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.4 演習(2)

- ・危険資産の総需要ポートフォリオ π_D

$$\Rightarrow \pi_D = (1/\lambda_A + 1/\lambda_B + 1/\lambda_C) [\Sigma^{-1}] [\mu - r_s \mathbf{1}]$$

- ・危険資産全体の需要総額

$$\Rightarrow \pi_{D,X} + \pi_{D,Y} = [\mathbf{ベクトル}]' (1/\lambda_A + 1/\lambda_B + 1/\lambda_C) [\Sigma^{-1}] [\mu - r_s \mathbf{1}]$$

- ・安全資産の市場清算条件

$$\Rightarrow \pi_{D,X} + \pi_{D,Y} + \pi_{D,S} = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} = 1250 \text{ (万円)}$$

「経営学」資料(中島英喜)

20

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.4 演習(2)

- ・安全資産の需給均衡($\text{---} = m_S \times p_S$)を使って、
 --- の均衡価格 (p_S) を求める

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 20 \times \text{---} &= 1250 - (\pi_{D,X} + \pi_{D,Y}) \\
 &= 1250 - [(1/\lambda_{\text{社会全体}}) \times \\
 &\quad \{ (\text{---})' \Sigma^{-1} \text{---} - (\text{---})' \Sigma^{-1} \text{---} \} \times r_S] \\
 &= 1250 - [150 \times \{ (20) - (100) r_S \}] \\
 &= 15000 r_S - 1750 \text{ (万円)} \quad \dots \text{【①】}
 \end{aligned}$$

「経営学」資料(中島英喜)

21

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.4 演習(2)

- ・安全利子率 (r_S) の定義を思い出す

$$\Rightarrow r_S = (\text{---} - \text{---}) \text{ (万円)} \div \text{---} \text{ (万円)} \quad \dots \text{【②】}$$

- ・前頁の①式に、上記②式を代入する

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 20 \times \text{---} &= 15000 r_S - 1750 \\
 &= 15000 \times \{ (\text{---} - \text{---}) \div \text{---} \} - 1750
 \end{aligned}$$

- ・これを解いて安全資産の均衡価格 (p_S) を求める

$$\Rightarrow p_S = \text{---} \text{ 万円}$$

「経営学」資料(中島英喜)

22

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.4 演習(2)

- ・市場均衡における安全利子率(r_s)を求める

$$\Rightarrow r_s = \frac{(28.75 - \quad)}{\quad} (\text{万円}) \div \quad (\text{万円})$$
$$= \quad \%$$

- ・この安全利子率を使い、危険資産価格(p)を求める

$$\Rightarrow p = (p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_N)'$$
$$= (1/\lambda_{\text{社会全体}}) \times \text{diag}[m_n]^{-1} [\Sigma^{-1}(\mu - r_s \mathbf{1})]$$
$$= (150) \times \text{diag}[m_n]^{-1} [\quad / 3 \quad / 3]'$$
$$= [\quad \quad]' (\text{万円})$$

「経営学」資料(中島英喜)

23

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.5【発展】 株価の変動

- ・1期間モデルの株価は期初の値のみ($\cdots$ 静的)

$\Rightarrow$ 現実の世界では、**株価は変動**する

$\Rightarrow$ 多期間モデルへの拡張

- ・現実の株価の変動は、5.2.2節の株価モデル(p.11)
のどの変数の変動によるのだろうか?

$$\Rightarrow \text{均衡価格 } p = (p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_N)'$$
$$= (1/\lambda_{\text{社会全体}}) \times \text{diag}[m_n]^{-1} [\Sigma^{-1}(\mu - r_s \mathbf{1})]$$

「経営学」資料(中島英喜)

24

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.5【発展】 株価の変動

- ・5.2.4節の演習(2)では安全資産のリターンは市場均衡を考慮した

⇒ 安全資産のリターン r_s は、**均衡の解**として得られた

⇒ 一方、危険資産のリターンの期待値 μ は所与であった

- ・問題のさらなる一般化

⇒ 危険資産のリターンの期待値 **μ の均衡値**を考える

⇒ では、代わりに何を所与にすればよいのか?

「経営学」資料(中島英喜)

25

5.2 均衡価格モデルの導出

5.2.5【発展】 株価の変動

- ・質問1: 5.2.4節の演習(2)では、安全資産に関して何を所与としたか?

⇒ 答(発行量 m_s と)

- ・質問2: 上記の2つ目の変数の一般的な名称は?

⇒ 答(... CF)

- ・質問3: 危険資産のCFは不確実だが、その実体は?

⇒ 答()

「経営学」資料(中島英喜)

26